Erinnerung: Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper K zusammen mit einer Totalordnung $\leqslant$, so dass ausserdem für alle $x, y, z \in K$ gilt:

$$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leqslant y + z$$
$$x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y \geqslant 0$$

Betrachte einen angeordneten Körper $(K, \leqslant)$.

Proposition: Es existiert eine eindeutige injektive Abbildung $i\colon \mathbb{Q} \hookrightarrow K$, so dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$i(0) = 0 \qquad i(a+b) = i(a) + i(b) \qquad a \leqslant b \iff i(a) \leqslant i(b)$$
$$i(1) = 1 \qquad i(a \cdot b) = i(a) \cdot i(b)$$

Konvention: Wir identifizieren $\mathbb{Q}$ mit seinem Bild via i.

Definition: Ein *angeordneter Körper* heisst *vollständig*, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge eine kleinste obere Schranke besitzt.

Proposition: Für jedes $x \in K$ setze $A_x := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x\}$. Ist K vollständig, so gilt für alle $x, y \in K$:

(a) $x = \sup(A_x)$

(b) $A_{x+y} = \{a + b \mid a \in A_x,\ b \in A_y\}$ $= A_x + A_y$

(c) $A_{-x} = \{a - b \mid a \in \mathbb{Q}^{<0},\ b \in \mathbb{Q} \setminus A_x\}$

(d) $A_{x \cdot y} = \{a \cdot b \mid a \in A_x,\ b \in A_y,\ a, b \geqslant 0\} \cup \mathbb{Q}^{<0}$ im Fall $x, y \geqslant 0$

(e) $x \leqslant y \iff A_x \subseteq A_y$

Satz: Zwischen je zwei vollständigen angeordneten Körpern existiert ein eindeutiger Isomorphismus.

Beweis: Seien $(K,\le)$ und $(L,\le)$ zwei solche mit $i:\mathbb{Q}\hookrightarrow K$ und $j:\mathbb{Q}\hookrightarrow L$.

Zu $x\in K$ setze $A_x := \{a\in\mathbb{Q} \mid i(a)<x\}$. Diese Menge ist nichtleer und nach oben beschränkt, denn wähle $n\in\mathbb{N}$ mit $i(n)\ge |x| \Rightarrow -n\in A_x$ und $n\in\mathbb{Q}$ ist eine obere Schranke von A_x.

$\Rightarrow j(A_x)\subseteq L$ nichtleer und durch $j(n)$ nach oben beschränkt. Setze $f(x) := \sup(j(A_x))$ als wohldefinierte Abb. $f: K\to L$.

Beh.: (a) $\forall a\in\mathbb{Q}: f(i(a)) = j(a)$.

(b) $\forall x,y\in K: f(x+y)=f(x)+f(y)$

(c) $\forall x\in K: f(-x) = -f(x)$

(d) $\forall x,y\in K: f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$

(e) $\forall x,y\in K: x\le y \Rightarrow f(x)\le f(y)$

$A_a = \mathbb{Q}^{<a} \Rightarrow \sup(j(A_a)) = j(a)$, denn für jedes $y\in L$ mit $y<j(a)$ existiert $b\in\mathbb{Q}$ mit $y<j(b)<j(a)$.

$f(x+y) = \sup(j(A_{x+y})) = \sup(j(A_x)+j(A_y)) =$
$= \sup(j(A_x))+\sup(j(A_y)) = f(x)+f(y)$.

$f(x)+f(-x) \overset{(b)}{=} f(x+(-x)) = f(0) \overset{(a)}{=} 0$.

Beweise (d) falls $x,y\ge 0$. Sonst benutze (c).

$x\le y \Leftrightarrow A_x\subseteq A_y \Leftrightarrow j(A_x)\subseteq j(A_y) \Rightarrow f(x)\le f(y)$.

Analog: Für jedes $y\in L$ setze
$B_y := \{b\in\mathbb{Q}\mid j(b)<y\}$
und $g(y) := \sup(i(B_y))$

Beh.: (f) $\forall x\in K: g(f(x)) = x$.

Analog $\forall y\in L: f(g(y)) = y$
und "$\Leftarrow$" in (e)
fertig!

Zu zeigen: $A_x = B_{f(x)}$. Dann folgt $g(f(x)) = \sup(B_{f(x)}) = \sup(A_x) = x$

$\forall a\in A_x: j(a) \le \sup(j(A_x)) = f(x)$

Da A_x kein Maximum besitzt, ist $j(a) < f(x) \Rightarrow a\in B_{f(x)}$ $\rightsquigarrow$ "$\subseteq$"

$\forall b\in B_{f(x)}: j(b)<f(x) \Rightarrow \exists a\in A_{<x}: j(b)<j(a)$
$\Rightarrow b<a<x \Rightarrow b\in A_{<x}$. $\rightsquigarrow$ "$\supseteq$"

Eindeutigkeit: Folgt aus $x = \sup(A_{<x})$.

qed.

Satz: Es existiert ein vollständiger angeordneter Körper.

Definition: Jeden solchen bezeichnen wir mit $\boxed{\mathbb{R}}$ und nennen seine Elemente *reelle Zahlen.*

Konstruktion 1 durch Cauchyfolgen:

Definition: (a) Eine Folge $\underline{x} = (x_n)$ in $\mathbb{Q}$ heisst *Cauchyfolge* wenn gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}\ \exists n_0\ \forall m, n \geqslant n_0 \colon |x_m - x_n| < \varepsilon$$

(b) Zwei Cauchyfolgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{Q}$ heissen *äquivalent* wenn gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0 \colon |x_n - y_n| < \varepsilon$$

Satz: (a) Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von (x_n) mit $[(x_n)]$.

(b) Für je zwei Cauchyfolgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{Q}$ hängen die Äquivalenzklassen

$$\begin{aligned}
[(x_n)] + [(y_n)] &:= [(x_n + y_n)], \\
[(x_n)] \cdot [(y_n)] &:= [(x_n y_n)], \\
[(x_n)] \leqslant [(y_n)] &:\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0 \colon x_n \leqslant y_n + \varepsilon
\end{aligned}$$

nur von den Äquivalenzklassen $[(x_n)]$ und $[(y_n)]$ ab.

(c) Die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ zusammen mit $+$ und $\cdot$ und $\leqslant$ sowie dem Nullelement $0 := [(0)]$ und dem Einselement $1 := [(1)]$ bildet einen vollständigen angeordneten Körper.

Konstruktion 2 durch Dedekind-Schnitte:

nach oben beschränkt.

Definition: Ein *Dedekind-Schnitt* ist ein nichtleeres echtes Anfangssegment $A \subseteq \mathbb{Q}$ bezüglich $\leqslant$, das kein maximales Element besitzt.

Proposition: Jedes $r \in \mathbb{Q}$ und je zwei Dedekind-Schnitte A und B induzieren Dedekind-Schnitte

$$
\begin{aligned}
i(r) \;&:=\; \{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\} \quad \ni r-1,\ \not\ni r\\
A + B \;&:=\; \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}\\
-A \;&:=\; \{a - b \mid a \in \mathbb{Q}^{<0},\ b \in \mathbb{Q} \setminus \cancel{B}\,A\}
\end{aligned}
$$

$\forall x \in \mathbb{Q}\setminus A,\ \forall a \in A \mid a < x$; $\forall y \in \mathbb{Q}\setminus B \mid \forall b \in B \mid b < y$ $\Rightarrow a+b < x+y$. $\Rightarrow x+y \notin A+B$.

Für jedes $c \in A$ ist $c < b \Rightarrow -c > a - b \Rightarrow -A$ nach oben beschränkt.

$$
A \cdot B \;:=\; \begin{cases}
\{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B,\ a, b \geqslant 0\} \cup \mathbb{Q}^{<0} & \text{falls } \cancel{0 \in A} \text{ und } \cancel{0 \in B},\\
-(A \cdot (-B)) & \text{falls } 0 \in A \text{ und } 0 \notin B,\\
-((-A) \cdot B) & \text{falls } 0 \notin A \text{ und } 0 \in B,\\
(-A) \cdot (-B) & \text{falls } 0 \notin A \text{ und } 0 \notin B,
\end{cases}
$$

Ersetzen: $\mathbb{Q}^{<0} \subseteq A$ und $\mathbb{Q}^{<0} \subseteq B$.

sowie die Relation

$$A \leqslant B \iff A \subseteq B.$$

Satz: (a) Die Menge $\mathbb{D}$ aller Dedekind-Schnitte mit den Operationen $+$ und $\cdot$, den Elementen $0 := i(0)$ und $1 := i(1)$ sowie der Relation $\leqslant$ bildet einen vollständigen angeordneten Körper.

(b) Die Abbildung $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{D}$ ist injektiv und verträglich mit $+$ und $\cdot$ und $\leqslant$.

Konvention: Wir identifizieren $\mathbb{Q}$ stillschweigend mit seinem Bild via der Abbildung i.

Bew.: (b) $i(r)+i(s) = \{a\in\mathbb{Q} \mid a<r\} + \{b\in\mathbb{Q} \mid b<s\} \overset{\text{Def.}}{=} \{a+b \mid a,b\in\mathbb{Q},\ a<r,\ b<s\} \overset{!}{=} \{c\in\mathbb{Q} \mid c<r+s\}$.

Wähle $c-s<a<r$
und setze $b:=c-a<s$. $\longleftarrow$ $c<r+s$
$\Rightarrow c=a+b$.

$r\leq s \iff \{a\in\mathbb{Q} \mid a<r\} \subseteq \{a\in\mathbb{Q} \mid a<s\}$.

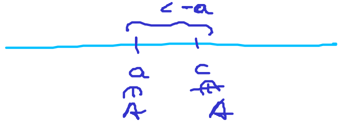
(a) Komm. & Ass. von $+$ ✓

$\forall A$: $A+(-A) = \left\{a+b \;\middle|\; \begin{array}{l} a\in A \\ b\in -A \end{array}\right\} = \left\{a+b-c \;\middle|\; \begin{array}{l} a\in A \\ b\in\mathbb{Q}^{<0} \\ c\in\mathbb{Q}\setminus A \end{array}\right\} \ni a+b-c < a-c \underset{c\geq a}{<} 0 \Rightarrow a+b-c\in\mathbb{Q}^{<0}$.

$i(0) = \{d\in\mathbb{Q} \mid d<0\} \ni d$: Finde $a\in A$, $b\in\mathbb{Q}^{<0}$, $c\in\mathbb{Q}\setminus A$ mit $a+b-c=d$.

$\Uparrow$ $\quad\Leftarrow$ $a\in A$, $c\in\mathbb{Q}\setminus A$ mit $a-c>d \iff c-a<-d$

$-d>0$



Weiß: $\exists a\in A\ \exists c\in\mathbb{Q}\setminus A$.

Ersetze a oder c durch $\frac{a+c}{2}$. $\Rightarrow$ $c-a$ wird halbiert.

Wiederhole: Finde $a\in A$ und $c\in\mathbb{Q}\setminus A$ mit $c-a$ beliebig klein.

Inverses Element bezgl. Multiplikation:

Sei $0\in A$. Zu zeigen: $\exists B$: $A\cdot B = \{c\in\mathbb{Q} \mid c<1\}$ und $0\in B$.

d.h.: $\{a\cdot b \mid a\in A, b\in B, a,b\geq 0\} \cup \mathbb{Q}^{<0} = \{c\in\mathbb{Q} \mid c<1\}$.

$B := \mathbb{Q}^{\leq 0} \cup \left\{\frac{1}{a}+b \;\middle|\; \begin{array}{l} a\in\mathbb{Q}\setminus A \\ b\in\mathbb{Q}^{<0} \end{array}\right\}$.

$a\in\mathbb{Q}\setminus A$, $b\in\mathbb{Q}^{<0}$, $a'\in A$, $a'\geq 0$

$\Rightarrow a'\cdot\left(\frac{1}{a}+b\right) = \frac{a'}{a}+a'b \leq \frac{a'}{a} < 1$

da $a>a'$.

Rest der Axiome analog.

Vollständigkeit: Sei X eine nichtleere nach oben beschränkte Menge von Dedekind Schnitten.

Setze $S := \bigcup X \subseteq \mathbb{Q}$ Anfangssegment. nichtleer

Nach Annahme existiert ein Dedekindschnitt A mit $\forall B \in X: B \leq A$, d.h. $B \subseteq A$.

Also ist $S \subseteq A$, also nach oben beschränkt.

Wäre $a \in S$ ein Maximum, wäre $B \in A$ mit $a \in B$, $\Rightarrow$ a wäre Maximum von B $\Rightarrow$ ↯.

Also ist S ein Dedekindschnitt, kleinste obere Schranke von X.

qed.